Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Kislinger

Frakcionální Lévyho proces

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2014

Rád bych na tomto místě poděkoval prof. RNDr. Bohdanu Maslowskému, DrSc. a Mgr. Karlu Kadlecovi za cenné rady a připomínky při psaní této práce. Neméně si však vážím práce ostatních přednášejících i cvičících během celého mého studia, kterým také patří můj vděk.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22. 5. 2014 Jan Kislinger

Název práce: Frakcionální Lévyho proces

Autor: Jan Kislinger

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Frakcionální Lévyho proces je relativně mladý pojem ze stochastické analýzy. Své využití má především ve fyzice, ale také ve financích, kde s jeho pomocí mohou být modelovány například ceny opcí. Frakcionální Lévyho proces vzniká nahrazením Wienerova procesu v rozkladu Lévyho procesu. Oproti Lévyho procesu ztrácí nezávislost přírůstků a oproti frakcionálnímu Wienerovu procesu ztrácí spojitost trajektorií. Tato práce je z převážné části brána jako kompilační a shrnuje potřebné znalosti pro zkoumání Lévyho procesu a zavedení frakcionálního Lévyho procesu.

Klíčová slova: frakcionální Lévyho proces, Lévy-Itoův rozklad, nekonečně dělitelná rozdělení

Title: Fractional Lévy Process

Author: Jan Kislinger

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Fractional Lévy process is a relatively new term from stochastic calculus. Its main use is in physics, but also in finance, where it could be used for modelling of option prices. Fractional Lévy process is derived from Lévy process, where Wiener process is replaced with fractional Wiener process. In comparison with Lévy process, it loses independency of increments and in comparison with fractional Wiener proces, it loses continuity of paths. This bachelor thesis is mainly written as a compilation, which summarizes necessary knowledge for the exploration of Lévy process and the implementation of fractional Lévy process.

Keywords: fractional Lévy process, Lévy-Ito decomposition, infinitely divisible distributions

Obsah

Úvod **2**

1 Kapitoly z teorie pravděpodobnosti **3**
- 1.1 Podmíněná střední hodnota 3
- 1.2 Charakteristická funkce 4
- 1.3 Konvoluce měr 5
- 1.4 Nekonečně dělitelná rozdělení 7

2 Náhodné procesy **9**
- 2.1 Definice a základní vlastnosti 9
- 2.2 Martingaly a dynamické systémy 11
- 2.3 Markovský čas 12

3 Lévyho proces **13**
- 3.1 Wienerův proces 13
  - 3.1.1 Itōův stochastický integrál 14
- 3.2 Poissonův proces 16
  - 3.2.1 Složený Poissonův proces 17
- 3.3 Lévyho proces 17
  - 3.3.1 Lévy-Itōův rozklad 18

4 Frakcionální procesy **21**
- 4.1 Frakcionální Wienerův proces 21
- 4.2 Frakcionální Lévyho proces 22

Literatura **24**

Úvod

Frakcionální Lévyho proces v této práci předvedeme jako zobecnění Wienerova procesu zavedením závislosti přírůstků a přidáním možnosti skoků. Autorem Lévyho procesu je francouzský matematik Paul Lévy, jehož hlavní tvorba v této oblasti spadá do první poloviny dvacátého století. Frakcionální Lévyho proces je však pojem z výrazně novější, vyskytuje se až v posledních desetiletích.

Hlavní využití tohoto procesu najdeme ve fyzice (například při modelování zemětřesení) a ve financích. V druhé zmíněné oblasti je zaváděn zejména jako alternativa Black-Scholesova modelu, u kterého selhávají předpoklady nezávislosti a normality přírůstku. Ukazuje se v praxi, že rozdělení přírůstků cen opcí má často těžší chvosty než normální rozdělení. O využití Lévyho procesu ve financích můžeme přečíst například v [1].

V první části této práce uvádíme vybrané kapitoly z teorie pravděpodobnosti, které jsou potřebné ke zkoumání vlastností procesů vedoucích k frakcionálnímu Lévyho procesu. Některá tvrzení zde uvedená jsou připravená pro zkoumání tohoto procesu nad rámec této práce. Například podmíněná střední hodnota σ-algebrou je zavedena mimo jiné pro zkoumání charakteristik procesu v čase $t+h$ podmíněných filtrací procesu do času t. Dále rozebereme konvoluci měr a charakteristickou funkci, které budeme používat pro teorii nekonečně dělitelných rozdělení. Ty dávají základ pro pochopení Lévyho procesu, který v libovolném čase je nekonečně dělitelným.

Ve druhé kapitole se podíváme na náhodné procesy obecně. Zavedeme důležité pojmy a uvedeme některé vlastnosti těchto pojmů. Důležitým pojmem této kapitoly je filtrace procesu, kterou chápeme jako posloupnost σ-algeber indexovaných stejnou množinou časů jako samotný proces. Ukážeme také příklad markovského času, který později použijeme jako čas skoku Poissonova procesu.

Třetí kapitola je věnována procesům s nezávislými a stacionárními přírůstky. Tyto dvě vlastnosti ukážeme jako postačující pro nekonečnou dělitelnost rozdělení náhodné veličiny procesu v konkrétním čase. Konkrétně se budeme věnovat Wienerovu procesu, (složenému) Poissonovu procesu a konečně Lévyho procesu. U posledního jmenovaného uvedeme jeho rozklad odvozený od rozkladu nekonečně dělitelného rozdělení.

V poslední kapitole zavedeme frakcionální Wienerův proces jako zobecnění Wienerova procesu přidáním závislosti přírůstků na minulosti. Na závěr vytvoříme frakcionální Lévyho proces zavedením možnosti závislosti přírůstků spojité části Lévyho procesu.

Kapitola 1

Kapitoly z teorie pravděpodobnosti

Než začneme se samotným zkoumáním náhodných procesů, je nutné uvést některé definice a tvrzení z teorie pravděpodobnosti. Tato kapitola sama o sobě není souvislým výkladem teorie a předpokládá již nějaké znalosti. Vybrány jsou pouze ty pojmy, které budou potřebné k našemu zkoumání náhodných procesů.

Budeme-li zde uvažovat náhodnou veličinu X definovanou na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami v $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, bude tím myšlena funkce

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}),$$

kde Ω je pravděpodobnostní prostor se σ-algebrou $\mathcal{A}$ a pravděpodobnostní mírou P, $\mathcal{B}$ značí borelovskou σ-algebru podmnožin množiny $\mathcal{X}$.

1.1 Podmíněná střední hodnota

Nejprve uvedeme pojem podmíněné střední hodnoty, který je důležitý zejména pro kapitolu Martingaly a dynamické systémy. Uvedeme pouze ty vlastnosti, které budou pro zmíněnou kapitolu nezbytné, nebo nám pomohou k lepšímu pochopení tohoto pojmu. Veškerá tvrzení zde uvedená ponecháme bez důkazů. Pouze se odkážeme na literaturu, kde jsou tyto důkazy uvedeny.

Definice 1.1. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou definované na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ respektive, kde $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Pokud pro každé $C \in \mathcal{C}$ platí*

$$\int_C Y dP = \int_C X dP,$$

potom Y je podmíněná střední hodnota X *(vzhledem k $\mathcal{C}$). Tento fakt budeme značit $Y = E[X \mid \mathcal{C}]$.*

Z této definice je zřejmé, že podmíněná střední hodnota nemusí být určena jednoznačně, neboť na množinách nulové míry není na podmíněnou střední hodnotu žádný požadavek.

Někdy je dobré chápat podmíněnou střední hodnotu jako ortogonální projekci $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ na množinu náhodných veličin $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{C}, P)$. Uvedeme zde proto ekvivalentní definici, která platí pouze pro náhodné veličiny s konečným druhým momentem.

Věta 1.1. *Nechť X a Y mají oproti definici 1.1 navíc konečný druhý moment, potom $Y = E[X \mid \mathcal{C}]$ tehdy a jen tehdy, když*

$$Y = \arg\min_{Z} \left\{ \mathrm{E}[(X-Z)^2], Z \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{C}, P) \right\},$$

kde $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{C}, P)$ značí množinu všech náhodných veličin s konečným druhým momentem na uvedeném pravděpodobnostním prostoru.

Důkaz. Například v [2] na straně 47, Věta 7.15 iii.

□

Věta 1.2. *Nechť X,$Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jsou náhodné veličiny, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ jsou σ-algebry a a,b,$c \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Potom platí*

i) $\mathrm{E}\left[aX + bY + c \mid \mathcal{C}\right] = a\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{C}\right] + b\mathrm{E}\left[Y \mid \mathcal{C}\right] + c$ *s.j.,*

ii) Když $X \leq Y$ s.j., potom $\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{C}\right] \leq \mathrm{E}\left[Y \mid \mathcal{C}\right]$ *s.j.,*

iii) $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{C}\right]\right] = \mathrm{E}\left[X\right]$.

iv) Když $\sigma(X) \subset \mathcal{C}$, potom $\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{C}\right] = X$ *s.j.,*

v) $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{C}\right] \mid \mathcal{D}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{D}\right] \mid \mathcal{C}\right] = \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{D}\right]$.

vi) Pokud $\sigma(X)$ a $\mathcal{C}$ jsou nezávislé σ-algebry, potom $\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{C}\right] = \mathrm{E}\left[X\right]$ *s.j.*

Důkaz. Například v [2] na straně 41, Věta 7.5.

□

1.2 Charakteristická funkce

Nyní zavedeme důležitý pojem charakteristické funkce. Ten bude důležitý pro nekonečně dělitelná rozdělení. Později, až objasníme souvislost nekonečně dělitelných rozdělení a Lévyho procesu, bude tento pojem nápomocný k snadnějšímu pochopení rozkladu Lévyho procesu.

Definice 1.2. *Funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem*

$$\varphi(t) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{itX\right\}\right],$$

kde X je náhodná veličina, budeme nazývat charakteristická funkce *náhodné veličiny X.*

Charakteristická funkce jednoznačně určuje rozdělení náhodné veličiny (viz [2] strana 84, Věta 15.9) a je konečná pro libovolnou náhodnou veličinu X. Stačí si uvědomit

$$\left|\mathrm{E}\left[\exp\left\{itX\right\}\right]\right| \leq \mathrm{E}\left[\left|\exp\left\{itX\right\}\right|\right] = 1$$

Nyní si uvedeme některé příklady charakteristických funkcí. Nebudeme rozepisovat celý postup výpočtu, pouze naznačíme některé jeho kroky.

Příklad 1.1 (Charakteristická funkce normálního rozdělení). Nechť $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Pomocí substitucí

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = y \qquad \text{a} \qquad y - it\sigma = z$$

můžeme spočítat

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx = \exp\left\{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Příklad 1.2 (Charakteristická funkce Poissonova rozdělení). Nechť $X \sim Poi(\lambda)$. Ze znalosti Taylorovy řady exponenciální funkce spočítáme

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = \exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}.$$

Věta 1.3. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s charakteristickými funkcemi φ_X a φ_Y. Potom náhodná veličina $X + Y$ má charakteristickou funkci $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$.*

Důkaz. Díky nezávislosti X a Y platí $\mathrm{E}\left[f(X) \cdot g(Y)\right] = \mathrm{E}\left[f(X)\right] \cdot \mathrm{E}\left[g(Y)\right]$, pro funkce f, g takové, že výrazy na obou stranách mají smysl. Můžeme tedy psát

$$\varphi_{X+Y} = \mathrm{E}\left[\exp\left\{it(X+Y)\right\}\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left\{itX\right\}\right] \cdot \mathrm{E}\left[\exp\left\{itY\right\}\right] = \varphi_X \cdot \varphi_Y,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

□

Z předchozí věty je zřejmé, že vznikne-li náhodná veličina součtem nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, tedy $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, tak charakteristická funkce náhodné veličiny X je n-tou mocninou charakteristické funkce náhodné veličiny Y_1, tedy $\varphi_X = \varphi_Y^n$. Tuto vlastnost budeme chtít později použít také obráceně. Je-li n-tá odmocnina charakteristické funkce náhodné veličiny X opět charakteristická funkce, můžeme X psát jako součet n nezávislých, stejně rozdělených náhodných funkcí.

1.3 Konvoluce měr

Další důležitý pojem pro nekonečně dělitelná rozdělení je konvoluce pravděpodobnostních měr. Takto by mohla být definována konvoluce měr obecněji, avšak v této práci téměř nebudeme pracovat s jinými mírami než pravděpodobnostními, proto zde uvedeme pouze definici pro pravděpodobnostní míry.

Definice 1.3. *Nechť μ_1 a μ_2 jsou pravděpodobnostní míry na stejném prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Pro každé $B \in \mathcal{B}$ definujeme* konvoluci *pravděpodobnostních měr předpisem*

$$(\mu_1 * \mu_2)(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B - x)\mu_2(dx).$$

Zjednodušené značení symbolizuje $(B - x) = \{y - x, y \in B\}$.

Věta 1.4. *Konvoluce dvou pravděpodobnostních měr je pravděpodobnostní míra.*

Důkaz. Nejprve ukážeme nezápornost míry. Ta plyne z nezápornosti μ_1 a z faktu, že μ_2 je pravděpodobnostní míra. Integrál kladné funkce podle pravděpodobnostní míry je vždy kladný.

Nyní chceme ukázat, že $(\mu_1 * \mu_2)(\mathbb{R}) = 1$. Stačí si uvědomit, že $\mathbb{R} - x = \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Platí tedy

$$(\mu_1 * \mu_2)(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(\mathbb{R} - x)\mu_2(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(\mathbb{R})\mu_2(dx) = \int_{\mathbb{R}} 1\mu_2(dx) = 1.$$

Jako poslední prozkoumáme chování konvoluce na spočetném sjednocení disjunktních množin. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}(\mu_1 * \mu_2)(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_1 \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i - x\right) \mu_2(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1 \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (B_i - x)\right] \mu_2(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left[\mu_1(B_i - x)\right] \mu_2(dx) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B_i - x)\mu_2(dx) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mu_1 * \mu_2)(B_i),\end{aligned}$$

čímž je dokázána platnost tvrzení. Poslední část tohoto důkazu byla převzata z [3] (strana 20, Proposition 1.2.1).

□

Definice 1.4. *Nechť μ je pravděpodobnostní míra na prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Pro tuto míru definujeme pro $n \in \mathbb{N}$ celočíselnou* konvoluční mocninu μ^{*n} *rekurentním předpisem*

$$\begin{aligned}\mu^{*1} &= \mu, \\ \mu^{*n} &= \mu^{*(n-1)} * \mu, && n \geq 2.\end{aligned}$$

Věta 1.5. *Konvoluční mocnina pravděpodobnostní míry je pravděpodobnostní míra.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý a vyplývá z věty 1.4. Pro $n = 1$ tvrzení jistě platí, pro $n \geq 2$ lze použít matematickou indukci.

□

Symbol $\mu^{*1/n}$ budeme chápat jako pravděpodobnostní míru, pro kterou platí $(\mu^{*1/n})^{*n} = \mu$. Je zřejmé, že taková míra nemusí existovat pro všechny kombinace μ a n. Příkladem takové dvojice je $\mu =$Alt(p), $p \in (0,1)$ a $n = 2$. Z věty 1.6 bude vidět, že $\mu^{*1/2}$ v tomto případě nemůže existovat.

Nyní uvedeme souvislost mezi součtem náhodných veličin a konvolucí pravděpodobnostních měr.

Věta 1.6. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s pravděpodobnostními mírami μ_X a μ_Y. Potom pravděpodobnostní míra μ_{X+Y} náhodné veličiny $X + Y$ je konvoluce μ_X a μ_Y, tedy $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$.*

Důkaz. Díky nezávislosti X a Y můžeme míru součtu $X+Y$ rozepsat na součin měr.

$$\begin{aligned}\mu_{X+Y}(A) = P[X+Y \in A] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}[x+y \in A] \mu_X(dx)\mu_Y(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}[x \in A-y] \mu_X(dx)\mu_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mu_X(A-y)\mu_Y(dy) \\ &= (\mu_X * \mu_Y)(A).\end{aligned}$$

□

1.4 Nekonečně dělitelná rozdělení

Definice 1.5. *Náhodná veličina X je* nekonečně dělitelná, *pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují nezávislé stejně rozdělené veličiny $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$, pro které platí*

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(n)} = X.$$

Věta 1.7. *Nechť X je náhodná veličina s pravděpodobnostní mírou μ a charakteristickou funkcí φ. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

i) X je nekonečně dělitelná n.v.

ii) $\mu^{*1/n}$ je pravděpodobnostní míra pro každé $n \in \mathbb{N}$.

iii) $\varphi^{1/n}$ je charakteristická funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Například v [3] na straně 23, Proposition 1.2.6.

□

Nyní si předvedeme souvislost bodů i) a ii) z předchozí věty na normálním rozdělení, které je nekonečně dělitelné.

Příklad 1.3 (Normální rozdělení). Ze znalosti vlastností součtu normálně rozdělených náhodných veličin víme, že pokud máme náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje rodina nezávislých náhodných veličin $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)} \sim N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$ jejichž součet má rozdělení rovné rozdělení X. Charakteristická funkce $\varphi_Y^{(n)}$ náhodné veličiny $Y_1^{(n)}$ můžeme dopočítat jako n-tou odmocninu charakteristické funkce φ_X, tedy $\varphi_Y^{(n)} = \varphi_X^{1/n} = \left[\exp\left\{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}\right]^{1/n} = \exp\left\{\frac{it\mu}{n} - \frac{t^2\sigma^2}{2n}\right\}$. Vidíme, že charakteristická funkce je v souladu s dříve zmíněným rozdělením.

Dalším příkladem nekonečně dělitelného rozdělení je složené Poissonovo rozdělení.

Příklad 1.4 (Složené Poissonovo rozdělení). Označme $X = \sum_{k=1}^{N} Z_k$ složené Poissonovo rozdělení, kde $N \sim Poi(\lambda)$ a Z_k jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s charakteristickou funkcí φ_Z. Z tvrzení 1.2.11 v [3] je vidět, že charakteristická funkce náhodné veličiny X je ve tvaru $\varphi_X = \exp\{\lambda(\varphi_Z - 1)\}$. Z tohoto vyplývá, že $\varphi_X^{1/n} = \exp\{\lambda/n(\varphi_Z - 1)\}$, neboli že $X = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}$, kde $Y_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{M_k^{(n)}} Z_i$ a $M_k^{(n)} \sim Poi(\lambda/n)$. Složené Poissonovo rozdělení je tedy nekonečně dělitelné.

Jelikož Poissonovo rozdělení můžeme chápat jako složené Poissonovo rozdělení s jednotkovými sčítanci, neboli $X = \sum_{k=1}^{N} Z_k$, kde $N \sim Poi(\lambda)$ a $Z_k = 1$ s.j. pro všechna $k \in \mathbb{N}$, stačí se zabývat pouze složeným Poissonovým rozdělením.

Z předchozích dvou příkladů a věty 1.3 můžeme jednoduše odvodit, že pokud máme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $Y \sim Poi(\lambda, \nu_Z)$ (ν_Z značí rozdělení sčítanců složeného Poissonova rozdělení), tak charakteristická funkce součtu těchto veličin je ve tvaru

$$\varphi_{X+Y}(t) = \exp\left\{ it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \lambda(\varphi_Z - 1) \right\}.$$

Pro naše další potřeby je však vhodnější jiný tvar, který zde uvedeme. V původním vztahu nahradíme charakteristickou funkci sčítanců složeného Poissonova rozdělení podle její definice.

$$\varphi_{X+Y}(t) = \exp\left\{ it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(e^{ity} - 1) d\mu_Z(y) \right\}.$$

Definice 1.6. *Nechť μ je borelovská míra na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ splňující*

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min\left\{y^2, 1\right\} \nu(dy) < \infty.$$

Tuto míru nazveme Lévyho míra.

Pravděpodobnostní míra je zřejmě také Lévyho míra. Stačí si uvědomit nerovnosti

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min\left\{y^2, 1\right\} \nu(dy) \leq \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} 1\nu(dy) = 1 < \infty.$$

Tento fakt nám umožňuje nahlédnout do následujícího rozkladu a najít souvislost s charakteristickou funkcí složeného Poissonova rozdělení

Věta 1.8 (Lévy-Khintchinův rozklad)**.** *Náhodná veličina X je nekonečně dělitelná tehdy a jen tehdy, když existují $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ a Lévyho míra ν takové, že*

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{ it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} [e^{ity} - 1 - ity\mathbb{1}(|y| < 1)]\nu(dy) \right\}.$$

Důkaz. Například v [3] strana 28, Proposition 1.2.14.

□

Z předchozí věty vidíme, že libovolné nekonečně dělitelné rozdělení je jednoznačně charakterizováno trojicí (μ, σ^2, ν).

Kapitola 2

Náhodné procesy

2.1 Definice a základní vlastnosti

Nejprve uvedeme definici náhodného procesu a některé vlastnosti potřebné pro naše další zkoumání.

Definice 2.1. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor a nechť* $T \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná množina. Potom soubor náhodných veličin*

$$X = (X_t, t \in T), \qquad X_t : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathcal{X},\mathcal{B})$$

se nazývá náhodný proces.

Pokud $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, budeme mluvit o d-rozměrném reálném procesu. V případě, že T je nejvýše spočetná, mluvíme o procesu s diskrétním časem. V případě, že $T = [0,\lambda]$, nebo T je nezáporná polopřímka, mluvíme o procesu se spojitým časem. V této kapitole uvedeme vlastnosti náhodných procesů obecně. Od dalších kapitol se budeme zabývat zejména jednorozměrným reálným procesem se spojitým časem. Pokud bude použit jiný typ náhodných procesů, bude na tento fakt na daném místě upozorněno.

Abychom zpřehlednili text, nebudeme stále psát $X = (X_t, t \in T)$, ale omezíme se pouze na značení X. Pokud nebude z kontextu jasné, o jakou množinu časů se jedná, uvedeme kompletní zápis procesu.

Definice 2.2. *Nechť X je náhodný proces se spojitým časem, pro který platí*

$$\lim_{s \to t} X_s \stackrel{p}{=} X_t. \tag{2.1}$$

Potom řekneme, že proces X je (stochasticky) spojitý v bodě t*. Pokud platí pouze jednostranná limita, říkáme, že proces je* zpojitý zprava*, popř.* zleva v bodě t*. Pokud je proces spojitý ve všech časech $t \in T$, nazveme proces* (stochasticky) spojitým (zprava, zleva).

Výraz (2.1) chápeme v tomto kontextu jako limitu v pravděpodobnosti.

Definice 2.3. *Nechť X je náhodný proces. Potom pro každé $\omega \in \Omega$ existuje funkce*

$$t \mapsto X_t(\omega), \qquad t \in T$$

kterou nazveme trajektorií *procesu X. U procesů s konvexní množinou časů T budeme říkat, že proces má spojité (zprava, zleva) trajektorie, pokud skoro všechny trajektorie jsou spojité (zprava, zleva).*

Snadno se dá ověřit, že má-li proces spojité trajektorie, je spojitý.

Definice 2.4. *Nechť X a Y jsou náhodné procesy, pro které platí*

$$P(X_t = Y_t) = 1, \qquad \forall t \in T.$$

Potom řekneme, že proces Y je modifikace *procesu X.*

Definice 2.5. *Nechť X a Y jsou náhodné procesy, pro které platí*

$$P(X_t = Y_t,\, \forall t \in T) = 1.$$

Potom řekneme, že X a Y jsou nerozlišitelné procesy*.*

Uvědomme si, že pro předchozí dvě definice dané procesy musí být definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru. Je zřejmé, že nerozlišitelné procesy jsou zároveň vzájemně modifikací. Pro obrácenou implikaci je třeba dalšího předpokladu.

Věta 2.1. *Nechť X je modifikací Y a nechť oba procesy mají spojité (zprava, zleva) trajektorie. Potom jsou X a Y nerozlišitelné.*

Důkaz. Podle definice 2.3 uvažujeme T jako interval. Označme $S = T \cap \mathbb{Q}$ a uvědomme si, že S je nejvýše spočetná množina. Potom platí

$$P(X_t = Y_t,\, \forall t \in S) = 1 - P(\exists t \in S : X_t \neq Y_t) =$$
$$= 1 - P\left[\bigcup_{t \in S} (X_t \neq Y_t)\right] \geq 1 - \sum_{t \in S} P(X_t \neq Y_t) = 1.$$

Nyní vezměme posloupnost $(t_n \in S, n \in \mathbb{N})$, pro kterou platí $t_n \to t$, pro $n \to \infty$. Ze spojitosti procesů platí $X_{t_n} \overset{s.j.}{\to} X_t$ a $Y_{t_n} \overset{s.j.}{\to} Y_t$. Pokud uvažujeme spojitost zprava (zleva), uvedené konvergence platí pro $t_n \searrow t$ ($t_n \nearrow t$). Proto $X_t \overset{s.j.}{=} Y_t, \forall t \in T$. Důkaz byl s drobnou modifikací převzat z [4] na straně 2, Věta 1.15. □

Definice 2.6. *Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je náhodný proces pro který jsou*

$$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

nezávislé náhodné veličiny. O tomto procesu budeme říkat, že má nezávislé přírůstky*.*

Definice 2.7. *Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je náhodný proces pro který platí*

$$X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t-s} - X_0, \qquad s, t \in T, s \leq t.$$

Budeme říkat, že takový proces má stacionární přírůstky*.*

Věta 2.2 (Kolmogorova-Čencovova)**.** *Nechť $X = (X_t, t \geq 0)$je náhodný proces takový, že pro nějaká $\alpha, \beta, N > 0$ platí*

$$E\left|X_t - X_s\right|^{\alpha} \leq N \left|t - s\right|^{1+\beta}, \qquad \forall s, t \geq 0.$$

Potom existuje spojitý proces $Y = (Y_t, t \geq 0)$ takový, že Y je modifikací X.

Důkaz. Například v [5] strana 232, Věta III.5.8.

□

Definice 2.8. *Nechť* $\mathcal{P} = \{P_{t_1,\dots,t_n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty\}$ *je systém konečněrozměrných rozdělení, pro který platí*

$$P_{t_1,\dots t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = \\ = P_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times \mathbb{R} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $1 \geq k \geq n$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ *a* $B_i \in \mathcal{B}$. *Tento systém budeme nazývat* konzistentní.

Věta 2.3 (Kolmogorova konzistenční)**.** *Pro každý konzistentní systém konečněrozměrných rozdělení existuje proces, jehož konečněrozměrná rozdělení odpovídají tomuto systému.*

Důkaz. Například v [5] strana 84, Věta I.10.3.

□

2.2 Martingaly a dynamické systémy

Definice 2.9. *Rodinu množinových systémů* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ *nazveme* filtrace, *pokud platí následující podmínky:*

i) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ *je* σ*-algebra,* $\forall t \in T$,

ii) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $\forall s,t \in T,\ s < t$.

Pokud navíc pro všechna $t \in T$ *platí* $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T)$ *pro nějaký proces* $X = (X_t, t \in T)$, *řekneme, že* $\mathcal{F}$ *je* přirozená filtrace *procesu* X.

Definice 2.10. *Nechť* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ *je filtrace a nechť* $X = (X_t, t \in T)$ *je náhodný proces. Řekneme, že* X *je* adaptovaný proces *vzhledem k* $\mathcal{F}$, *pokud pro každé* $t \in T$ *je* X_t *je měřitelná náhodná veličina vzhledem k* $\mathcal{F}_t$.

Definice 2.11. *Nechť* $X = (X_t, t \in T)$ *je adaptovaný proces vzhledem k* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ *s konečným prvním momentem. Potom řekneme, že*

a) X *je* submartingal vzhledem k $\mathcal{F}$, *jestliže* $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$,

b) X *je* martingal vzhledem k $\mathcal{F}$, *jestliže* $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$,

c) X *je* supermartingal vzhledem k $\mathcal{F}$, *jestliže* $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$

s.j. pro všechna $s > t$, $s,t \in T$. *Je-li náhodný proces martingal (submartingal, supermartingal) vzhledem k přirozené filtraci, řekneme, že proces je* martingal (submartingal, supermartingal).

Pro potřeby této práce by stačil zadefinovat pouze martingal. Pokud v některém z následujících tvrzení budeme zmiňovat všechny pojmy z předchozí definice, důkaz bude prováděn pouze pro martingal. Důkazy ostatních dvou typů procesu by však vypadaly velmi podobně.

Věta 2.4. *Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je martingal (submartingal, supermartingal) vzhledem k $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ a adaptovaný vzhledem k $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t, t \in T)$, pro které platí $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$, pro všechna $t \in T$. Potom $X = (X_t, t \in T)$ je martingal (submartingal, supermartingal) vzhledem k $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro martingal, pro ostatní typy procesů je důkaz obdobný. První rovnost vychází z věty 1.2 v), následující plyne z definice martingalu a poslední rovnost plyne z adaptovanosti procesu. Nechť $s < t$, potom

$$E[X_t \mid \mathcal{G}_s] = E[E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{G}_s] = E[X_s \mid \mathcal{G}_s] = X_t \qquad s.j.$$

V [4] (strana 2, tvrzení 1.7) je toto dokázáno pro submartingal, odkud byt také tento důkaz převzat.

□

Přímým důsledkem předchozí věty je fakt, že libovolný martingal (submartingal, supermartingal) vzhledem k nějaké filtraci je zároveň také martingal (submartingal, supermartingal). Stačí si uvědomit, že přirozená filtrace je nejmenší možná filtrace, na kterou může být proces adaptován.

Nyní prozkoumáme možnost vytvořit z libovolného procesu martingal. Budeme zde uvažovat levou limitu filtrace

$$\sigma(X_{t^-}) = \sigma\left[\bigcup_{s<t} \sigma(X_s)\right].$$

Definice 2.12. *Nechť $X = (X_t, t \in T)$ a $Y = (Y_t, t \in T)$ jsou náhodné procesy a Y je adaptovaný vzhledem k filtraci $(\sigma(X_{t^-}), t \in T)$Nechť dále platí, že $X - Y = (X_t - Y_t, t \in T)$ je martingal. Potom řekneme, že Y je* kompenzátor *procesu X.*

2.3 Markovský čas

Definice 2.13. *Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je náhodný proces adaptovaný vzhledem k filtraci $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$. Funkci $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ splňující podmínku $[\tau \le t] = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$ budeme nazývat markovský čas.*

Markovský čas je tedy náhodná veličina času nějaké události, o které můžeme říci, zda nastala, či nenastala do času t na základě informací o procesu, který je adaptován na danou filtraci, do času t. Je dobré si uvědomit, že množina $[\tau > t]$ je doplňkem množiny uvedené v definici a leží tedy také- podle definice σ-algebry- ve filtraci procesu v čase t.

Jednoduchým příkladem markovského času může být čas prvního výstupu z množiny, či prvního vstupu do množiny. Protože však vstup do množiny je ekvivalentní s výstupem z doplňku množiny, uvedeme pouze první variantu.

Věta 2.5. *Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je spojitý adaptovaný proces vzhledem k $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ a nechť B je otevřená borelovská množina. Použijeme-li úmluvu $min\{\} = +\infty$, tak funkce $\tau = min\{t \in T : X_t \notin B\}$ je markovský čas.*

Důkaz. Například v [6] strana 9, Příklad 1.10.

□

Kapitola 3

Lévyho proces

V této kapitole budeme uvažovat už jen výhradně jednorozměrné reálné procesy se spojitým nezáporným časem. Množinu T tedy můžeme nahradit intervalem $[0,+\infty)$, místo $t \in T$ budeme tedy psát $t \geq 0$.

3.1 Wienerův proces

Definice 3.1. *Náhodný proces $W = (W_t, t \geq 0)$ nazveme* Wienerův proces*, pokud splňuje následující vlastnosti:*

(W1) *W má nezávislé a stacionární přírůstky,*

(W2) *$\forall t > 0$ $W_t \sim N(0,t)$, $W_0 = 0$,*

(W3) *W má spojité trajektorie.*

V různých literaturách můžeme nalézt definice, které se mohou od této významově lišit. Mnohdy není požadována nulová střední hodnota, neboli centrovanost procesu. Některé obsahují parametr volatility procesu, který je v naší definici roven jedné. (Volatilitou procesu je zde myšlen rozptyl v čase $t = 1$, tedy $\mathrm{var}(X_1)$.) Nám bude pro Wienerův proces stačit tato definice. Pokud budeme požadovat obecnější Wienerův proces, budeme používat značení

$$\tilde{W}_t(\mu,\sigma) = \mu t + \sigma W_t,$$

kde první sčítanec je tzv. drift a druhý sčítanec je σ-násobek Wienerova procesu. Pro tento proces platí $\mathrm{E}[\tilde{W}_t(\mu,\sigma)] = \mu t$ a $\mathrm{var}[\tilde{W}_t(\mu,\sigma)] = \sigma^2 t$. Podmínky (W1) a (W3) jsou však zachovány. Například software Wolfram Mathematica pracuje s takto obecným Wienerovým procesem.

Věta 3.1. *Wienerův proces je martingal.*

Důkaz. Vlastnost plyne z nezávislosti přírůstků a jejich nulové střední hodnoty. $\square$

3.1.1 Itōův stochastický integrál

V této kapitole si předvedeme stochastický integrál funkce podle Wienerova procesu. Funkci v tomto případě můžeme chápat jako deterministický proces, který v každém čase nabývá s.j. konstanty. Integrál náhodného procesu by mohl být zadefinován podobným způsobem, avšak bylo by nutné zde zavést limitu procesů. V této práci budeme potřebovat pouze integrál nenáhodné funkce.

Definice 3.2. *Nechť $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ je dělení intervalu a $(\xi_i, i = 1,...,n)$ je posloupnost reálných čísel. Definujeme* jednoduchou funkci $g(t)$ *předpisem*

$$\begin{aligned} g(0) &= \xi_1, \\ g(t) &= \xi_i, && t \in (t_{i-1},t_i], i = 1,...,n. \end{aligned}$$

Definice 3.3. *Nechť $g(t)$ je jednoduchá funkce zavedená v definici 3.2 a nechť $W = (W_t, t \in [0,t_n])$ je Wienerův proces. Pro $t \in [t_k, t_{k+1})$ definujeme* Itōův stochastický integrál jednoduché funkce *předpisem*

$$\int_0^t g(s)dW_s = \sum_{i=1}^{k} \left[\xi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right] + \xi_{k+1}(W_t - W_k).$$

V následující definici budeme limitou posloupnosti funkcí rozumět konvergenci ve smyslu (3.1) na intervalu (a,b), $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$ a L_2-limitou budeme rozumět konvergencí podle středu, tedy

$$f_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 = 0, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{L_2}{=} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X - X_n)^2 = 0. \tag{3.2}$$

Definice 3.4. *Nechť $g_n(t)$ je posloupnost jednoduchých funkcí, $g_n(s) \to g(s)$ na intervalu $[0,t]$, kde g je měřitelná funkce, a nechť $W = (W_t, t \in [0,t])$ je Wienerův proces. Potom definujeme* Itōův stochastický integrál měřitelné funkce *předpisem.*

$$\int_0^t g(s)dW_s \overset{L_2}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^t g_n(s)dW_s.$$

Korektnost limity v předchozí definici je uvedena v [4] (strana 17, poznámka 3.35). Ve zmíněném textu je však definován stochastický integrál náhodného procesu a limitu náhodných procesů autor uvažuje jako

$$G_n \to X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} \int_0^t (G_n - X)^2 ds = 0. \tag{3.3}$$

V naší definici používáme deterministické funkce, jejichž střední hodnota je rovna funkci samotné. Pokud tedy funkce splňují podmínku (3.1), splňují i konvergenci náhodných procesů (3.3).

Věta 3.2. *Nechť g je měřitelná funkce a W je Wienerův proces. Potom platí*

i) $\mathrm{E} \int_0^t g(s)dW_s = 0,$

ii) $\mathrm{E}\left[\int_0^t g(s)dW_s\right]^2 = \int_0^t g^2(s)ds.$

Důkaz. Zavedeme posloupnost $(g_n, n \in \mathbb{N})$ jednoduchých funkcí konvergujících k funkci g, kde g_n je konstantní na intervalech $[t_0,t_1]$ a $(t_{k-1},t_k]$, $k = 2,...,n$ pro $t = t_n$.

i) Nejprve dokážeme nulovost střední hodnoty. Limitu v druhém výrazu chápeme jako L_2-limitu posloupnosti náhodných veličin. Platí

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\int_0^t g(s)dW_s = \mathrm{E}\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_n(s)dW_s &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\int_0^t g_n(s)dW_s \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\sum_{k=1}^n g_n(t_k)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n g_n(t_k)\mathrm{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = 0.
\end{aligned}
$$

ii) Za platnosti nulové střední hodnoty dostáváme $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{var}(X)$. Můžeme tedy počítat (limitou ve druhém výrazu je myšlena L_2 limita)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\int_0^t g(s)dW_s\right]^2 &= \mathrm{var}\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_n(s)dW_s \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathrm{var}\sum_{k=1}^n g_n(t_k)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n g_n^2(t_k)\,\mathrm{var}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})g_n^2(t_k) = \int_0^t g^2(s)ds.
\end{aligned}
$$

V důkazu jsme použili záměnu pořadí limity a střední hodnoty. Tuto skutečnost nyní opodstatníme pomocí Jensenovy nerovnosti. Předpokládejme, že máme konvergující náhodné veličiny s konečným druhým momentem $X_n \xrightarrow{L_2} X$. Potom dostaneme nerovnosti

$$0 = \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[(X_n - X)^2] \geq \lim_{n\to\infty}[\mathrm{E}(X_n - X)]^2 \geq 0,$$

ze kterých plyne

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}[E(X_n) - E(X)] &= 0 \\
\lim_{n\to\infty}E(X_n) &= E(X) \\
\lim_{n\to\infty}E(X_n) &= E(\lim_{n\to\infty}X_n).
\end{aligned}
$$

Pro ukázání této vlastnosti pro rozptyl použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X_n - X)^2] &= \mathrm{E}(X_n^2) + \mathrm{E}(X^2) - 2[\mathrm{E}(X_nX) - \mathrm{E}(X^2)] - 2\mathrm{E}(X^2) \\
&= \mathrm{var}(X_n) - \mathrm{var}(X) - 2\mathrm{E}[(X_n - X)X] \\
&\geq \mathrm{var}(X_n) - \mathrm{var}(X) - 2\sqrt{\mathrm{var}(X_n - X)\,\mathrm{var}(X)}
\end{aligned}
$$

Platí tedy

$$\mathrm{E}[(X_n - X)^2] + 2\sqrt{\mathrm{var}(X_n - X)\,\mathrm{var}(X)} \geq \mathrm{var}(X_n) - \mathrm{var}(X) \tag{3.4}$$

Podobným postupem můžeme ukázat, že platí také

$$\mathrm{E}[(X_n - X)^2] + 2\sqrt{\mathrm{var}(X_n - X)\,\mathrm{var}(X_n)} \geq \mathrm{var}(X) - \mathrm{var}(X_n) \tag{3.5}$$

Limity levých stran ve výrazech (3.4) a (3.5) pro $n \to \infty$ jsou rovny 0. Pomocí věty „o dvou policajtech" se můžeme přesvědčit, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(X_n) = \mathrm{var}(X),$$

čímž je celé tvrzení dokázáno.

□

Věta 3.3. *Nechť $\int_0^t g(s)dW_s$ je stochastický integrál podle definice (3.4) a nechť $g(s)$ je nezávislá na t. Potom proces $I = (\int_0^t g(s)dW_s, t \geq 0)$ je martingal.*

Důkaz. Pro $q < t$ vezměme posloupnosti dělení $(0 = q_0 < ... < q_n = q, n \in \mathbb{N})$ a $(q = t_0 < ... < t_n = t, n \in \mathbb{N})$ a posloupnost funkcí $(g_n, n \in \mathbb{N})$ takových, aby byly splněny předpoklady definice (3.4). Potom platí

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(s)dW_s &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t g_n(s)dW_s \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n g_n(q_i)(W_{q_i} - W_{q_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n g_n(t_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^q g_n(s)dW_s + \int_q^t g_n(s)dW_s \right] = \int_0^q g(s)dW_s + \int_q^t g(s)dW_s.
\end{aligned}$$

Vezměme $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ filtraci procesu X.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[I_t|\mathcal{F}_q\right] &= \mathrm{E}\left[\int_0^t g(s)dW_s|\mathcal{F}_q\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^q g(s)dW_s + \int_q^t g(s)dW_s|\mathcal{F}_q\right] \\
&= \int_0^q g(s)dW_s + \mathrm{E}\left[\int_q^t g(s)dW_s\right] = \int_0^q g(s)dW_s = I_q
\end{aligned}$$

□

3.2 Poissonův proces

Definice 3.5. *Náhodný proces $N = (N_t, t \geq 0)$ nazveme* Poissonův proces *s intenzitou λ, pokud splňuje následující vlastnosti:*

(N1) *N má nezávislé a stacionární přírůstky,*

(N2) *$\forall t > 0$ $N_t \sim Poi(t\lambda)$, $N_0 = 0$ s.j.*

V následující definici budeme používat pomocný proces $\Delta X = (\Delta X_t, t \geq 0) = (X_t - X_{t^-}, t \geq 0)$, který můžeme nazývat proces skoků.

Definice 3.6. *Pro náhodný proces* $X = (X_t, t \geq 0)$ *definujeme posloupnost* $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *náhodných veličin vztahem*

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_n &= \min\{t > T_{n-1}, \Delta X_t \neq 0\}, \qquad && n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tyto náhodné veličiny budeme nazývat časy skoků.

Z věty 2.5 víme, že tyto časy jsou markovské časy. Stačí si uvědomit, že čas skoku je v tomto případě zároveň čas opuštění otevřené množiny $(-\epsilon, \epsilon)$, kde $0 < \epsilon < 1$.

Věta 3.4. *Pokud* $N = (N_t, t \geq 0)$ *je Poissonův proces s parametrem* λ, *potom rozdíly časů skoků* $T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ *jsou nezávislé, stejně rozdělené veličiny a* $T_1 \sim Exp(\lambda)$.

Důkaz. První část plyne z nezávislosti a stacionarity přírůstků Poissonova procesu. Pro důkaz druhé části spočítáme distribuční funkci náhodné veličiny T_1

$$F_T(t) = P[T_1 \leq t] = P[N_t \geq 1] = 1 - P[N_t = 0] = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

□

3.2.1 Složený Poissonův proces

Definice 3.7. *Nechť* $N = (N_t, t \geq 0)$ *je Poissonův proces s intenzitou* λ *s časy skoků* $(T_n, n \in \mathbb{N})$ *a* $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ *je posloupnost nezávislých veličin s rozdělením* ν_Z. *Potom definujeme* složený Poissonův proces *s intenzitou* λ *a mírou* ν *předpisem*

$$\tilde{N}_t = \sum_{k=1}^{n} Z_k \qquad T_{n-1} < t \leq T_n.$$

Je zřejmé, že Poissonův proces můžeme chápat jako složený Poissonův proces, ve kterém $Z_k = 1$ s.j. pro každé $k \in \mathbb{N}$. Pokud tedy uvedeme vlastnost složeného Poissonova procesu, bude tato vlastnost platit i pro Poissonův proces.

3.3 Lévyho proces

Definice 3.8. *Náhodný proces* $L = (L_t, t \geq 0)$ *nazveme* Lévyho proces, *pokud splňuje následující vlastnosti:*

(L1) *L má nezávislé a stacionární přírůstky,*

(L2) $L_0 = 0$ *s.j.,*

(L3) *L je stochasticky spojitý proces.*

Pro zjednodušení můžeme někdy uvažovat zprava spojité Lévyho procesy s vlastní limitou zleva, tedy procesy s tzv. càdlàg trajektoriemi (zkratka francouzského "continue à droite, limite à gauche"). Že můžeme takové procesy uvažovat ospravedlňuje následující tvrzení.

Věta 3.5. *Nechť L je Lévyho proces, potom L má modifikaci s càdlàg trajektoriemi.*

Důkaz. Například v [3] na straně 74, Theorem 2.1.7. □

Dále ukážeme souvislosti Lévyho procesu s předchozími procesy, tedy že Wienerův i Poissonův proces jsou Lévyho procesy.

Věta 3.6. *Nechť $W = (W_t, t \geq 0)$ je Wienerův proces, potom W je také Lévyho proces.*

Důkaz. První podmínky obou procesů jsou totožné, tedy (W1) $\Leftrightarrow$ (L1). (L2), respektive (L3), plyne přímo z (W2), respektive (W3). □

Věta 3.7. *Nechť $N = (N_t, t \geq 0)$ je Poissonův proces, potom N je také Lévyho proces.*

Důkaz. První podmínky obou procesů jsou totožné, tedy (N1) $\Leftrightarrow$ (L1). (L2) plyne přímo z (N2). Pro (L3) si stačí uvědomit, že $N_{t+h} - N_t \stackrel{d}{=} N_h$, pokud $t \geq 0$, $h > 0$. Pokud $h \to 0$, potom pro každé $\epsilon > 0$ platí $\lim_{h \to 0^+}[P(N_{t+h} - N_t > \epsilon)] = \lim_{h \to 0^+}[P(N_h - N_0 > \epsilon)] = \lim_{h \to 0^+}(1 - e^{-h\lambda}) = 0$, čímž je dokázána stochastická spojitost Poissonova procesu. □

Nyní si ukážeme, že Lévyho proces je v každém čase nekonečně dělitelná náhodná veličina, což nám umožní použít rozklad a vlastnosti těchto rozdělení, které jsme uvedli v kapitole 1.4.

Věta 3.8. *Nechť $L = (L_t, t \geq 0)$ je Lévyho proces, potom L_t je nekonečně dělitelná náhodná veličina pro každé $t \geq 0$.*

Důkaz. Důkaz plyne z nezávislosti a stacionarity přírůstků. Můžeme tedy napsat rozklad $L_t = \sum_{k=1}^{n} L_{tk/n} - L_{t(k-1)/n}$ s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tento důkaz byl převzat z [3] (strana 40, Proposition 1.3.1). □

3.3.1 Lévy-Itōův rozklad

Až do této chvíle jsme se setkávali pouze s mírami, které nám určovali rozdělení zobrazení $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Míra tedy byla nezávislá na $\omega \in \Omega$. Nyní si ukážeme obecnější typ míry, který je závislý na ω.

Definice 3.9. *Rodinu náhodných veličin $(M(B), B \in \mathcal{B})$ nazveme* náhodná míra, *pokud pro každou posloupnost vzájemně disjunktních množin $(B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N})$ splňuje*

i) $M(\emptyset) = 0$ *s.j.,*

ii) $M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} M(B_n)$ *s.j.,*

iii) $M(B_1), \ldots, M(B_k)$ *jsou vzájemně nezávislé,* $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

Definice 3.10. *Nechť M je náhodná míra taková, že $M(A)$ má Poissonovo rozdělení pro každé $A \in \mathcal{A}$, pokud $M(A) < \infty$. Tuto míru nazveme* Poissonovská náhodná míra.

Nyní uvedeme příklad náhodné míry na $(\mathbb{R}, \{B \in \mathcal{B}, 0 \notin B\})$, který bude později podstatný pro rozklad Lévyho procesu. Pro proces $X = (X_t, t \leq 0)$ a množinu $0 \notin A \in \mathcal{B}$ definujeme čítací míru vztahem

$$N(t,A) = \#\{0 \leq s \leq t : \Delta X_s \in A\}. \tag{3.6}$$

První dvě podmínky z definice 3.9 jsou zřejmě splněny, podmínka iii) je dokázána v [3] (strana 88, Proposition 2.3.5). Je zřejmé, že pro pevné A se jedná o čítací proces s časem $t \geq 0$. Dále uvedeme vlastnost, která nám tento proces blíže specifikuje.

Věta 3.9. *Nechť $X = (X_t, t \geq 0)$ je Lévyho proces a $N(t,A)$ je k němu definovaná čítací míra vztahem (3.6), kde $0 \notin \bar{A}$, neboli 0 není hromadným bodem množiny A. Potom $(N(t,A), t \geq 0)$ je Poissonův proces s intenzitou $\mu(A) = \mathrm{E}\,[N(1,A)]$.*

Důkaz. Například v [3] strana 88, Proposition 2.3.5.

□

Z předchozí věty vidíme, že čítací míra (3.6) je Poissonovská náhodná míra.

Definice 3.11. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, $t \geq 0$ a $0 \notin \bar{A}$, potom náhodnou funkci definovanou předpisem*

$$\int_A f(x)N(t,dx) = \sum_{x \in A} f(x)N(t, \{x\})$$

budeme nazývat Poissonův integrál *funkce f.*

Definice 3.12. *Pro měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \notin \bar{A}$ a každé $t \geq 0$ definujeme* kompenzovaný Poissonův integrál *předpisem*

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx) = \int_A f(x)N(t,dx) - t\int_A f(x)\mu(dx),$$

kde $\mu(\,\cdot\,) = \mathrm{E}[N(1,\,\cdot\,)]$. Pokud $0 \in \bar{A}\backslash A$, potom definujeme

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx) \stackrel{L_2}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\tilde{N}(t,dx),$$

kde $A_1 \subset A_2 \subset ...$ je posloupnost množin $0 \notin \bar{A}_n \subset [-R,R]$, $R > 0$ a $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Věta 3.10. *Nechť $0 \notin \bar{A}$, $t \geq 0$ a f je měřitelná funkce.*

1. *Pokud $f \in L^1(A,\mu)$, tak platí*

$$\mathrm{E}\left(\int_A f(x)N(t, dx)\right) = t\int_A f(x)\mu(dx).$$

2. Pokud $f \in L^2(A,\mu)$, tak platí

$$var\left(\left|\int_A f(x)N(t,dx)\right|\right) = t\int_A f^2(x)\mu(dx).$$

Důkaz. Například v [3] na straně 91, Theorem 2.3.8.

□

Věta 3.11. *Pro $0 \notin \bar{A}$ je $K = (t\int_A f(x)\mu(dx), t \geq 0)$ kompenzátor procesu Poissonova integrálu $I = (\int_A f(x)N(t,dx), t \geq 0)$ a proces kompenzovaného Poissonova integrálu $I - K$ je martingal.*

Důkaz. Je zřejmé, že K je deterministický proces a je tedy adaptovaný na $\sigma(X_{t^-})$. Stačí ukázat, že I-K je martingal. Nechť $\mathcal{F}$ je přirozená filtrace procesu I. Z nezávislosti a stacionarity přírůstků Lévyho procesu dostaneme $N(t,\cdot) - N(s,\cdot) \stackrel{d}{=} N(t-s,\cdot)$ a můžeme psát pro $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[I_t - K_t|\mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}[I_s + (I_t - I_s) - K_s - (K_t - K_s)|\mathcal{F}_s] \\
&= I_s - K_s + \mathrm{E}[I_{t-s} - K_{t-s}] \\
&= I_s - K_s + \mathrm{E}\left[\int_A f(x)N(t-s,dx)\right] - (t-s)\int_A f(x)\mu(dx) \\
&= I_s - K_s.
\end{aligned}$$

□

Věta 3.12. *Nechť $0 \notin \bar{A}$, potom*

a) $\int_A f(x)N(t,dx)$ má složené Poissonovo rozdělení.

b) $(\int_A f(x)N(t,dx), t \geq 0)$ je složený Poissonův proces.

Důkaz. Například v [3] strana 91, Proposition 2.3.8 a strana 93 Proposition 2.3.10 respektive.

□

Věta 3.13 (Lévy-Itôův rozklad)**.** *Pokud $L = (L_t, t \geq 0)$ je Lévyho proces, potom existují $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, Wienerův proces W a Poissonovská náhodná míra N takové, že pro všechna $t \geq 0$ platí*

$$L_t = \mu t + \sigma^2 W_t + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx)$$

Důkaz. Například v [3] strana 108, Proposition 2.4.16.

□

Předchozí věta říká, že Lévyho proces můžeme rozložit na lineární drift, Wienerův proces a procesy malých a velkých skoků. Malých skoků může být nekonečně mnoho, dokonce součet velikostí skoků je skoro jistě nekonečný, proto je nutné zavádět kompenzovaný integrál. Velkých skoků je konečně mnoho na konečném intervalu, avšak jsou neomezené ve své velikosti, proto pro ně kompenzovaný integrál nemusí existovat.

Kapitola 4

Frakcionální procesy

V minulé kapitole jsme uvažovali pouze procesy s nezávislými přírůstky. Nyní zavedeme modifikaci Wienerova procesu, která již má závislé přírůstky. Tento proces poté použijeme pro zavedení frakcionálního Lévyho procesu.

4.1 Frakcionální Wienerův proces

Definice 4.1. *Náhodný proces* $W^H = (W_t^H, t \geq 0)$ *nazveme* frakcionální Wienerův proces *s Hurstovým indexem* $H \in (0,1)$*, pokud splňuje následující vlastnosti:*

(fW1) $\forall t > 0$ $W_t^H \sim N(0,t^{2H})$, $W_0^H = 0$,

(fW2) $cov(W_t^H, W_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \qquad s,t \geq 0$

(fW3) *W má spojité trajektorie.*

Je zřejmé, že pro $H = 1/2$ se jedná o Wienerův proces.

Věta 4.1. *Frakcionální Wienerův proces existuje.*

Důkaz. Zřejmě pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou posloupnost časů $t_1,\ldots,t_n$ je dáno rozdělení vektoru $(W_{t_1}^H,\ldots,W_{t_n}^H) \sim N_n(\mu, \Sigma)$, lze pomocí Kolmogorovy konzistenční věty ukázat, že existuje proces s takovými konečněrozměrnými rozděleními. Z (fW1) plyne, že $\mu = (0,\ldots,0)$. Z (fW2) máme $\Sigma_{i,j} = cov(W_{t_i}^H, W_{t_j}^H)$. Že se jedná o symetrickou pozitivně semidefinitní matici je dokázáno například v [7] na straně 6. Spojitost trajektorií se dá ukázat pomocí Kolmogorovy-Čencovovy. Zvolme $\alpha = 2N$, kde $N > 1/H$ je sudé. Potom pro $s,t \geq 0$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X_s - X_t)^{2N}] &\leq (\mathrm{E}[(X_s - X_t)^2])^N = (\mathrm{E}(X_s^2) + \mathrm{E}(X_t^2) - 2\mathrm{E}(X_s X_t))^N \\
&= (\mathrm{var}(X_s) + \mathrm{var}(X_t) - 2\,\mathrm{cov}(X_s, X_t))^N \\
&= (s^{2H} + t^{2H} - (s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H})^N \\
&= |s-t|^{2HN}.
\end{aligned}$$

□

Následující věta nám dává návod, jak sestrojit frakcionální Wienerův proces pomocí Itōova integrálu.

Věta 4.2. *Nechť $X^H = (X_t^H, t \geq 0)$ je proces definovaný vztahem*

$$X_t^H = \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - |s|^{H-1/2}] dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s,$$

kde W je Wienerův proces a $H \in (0,1)$ je reálná konstanta. Potom X^H je frakcionální Wienerův proces s Hurstovým indexem H.

Důkaz. V [8] je takovýmto způsobem zaveden frakcionální Wienerův proces. Vlastnosti z definice 4.1 jsou ve stejné knize dokázány později.

□

Integrované funkce v předchozí větě se dají aproximovat pomocí jednoduchých funkcí, tudíž je integrál podle Wienerova procesu myšlen podle definice 3.4.

Věta 4.3. *Frakcionální Wienerův proces má stacionární přírůstky.*

Důkaz. Vezměme $t,h > 0$. Veličiny $(W_{t+h}^H - W_t^H)$ a $(W_h^H - W_0^H)$ jakožto rozdíly normálně rozdělených veličin mají také normální rozdělení. Stačí tedy ukázat, že mají stejnou střední hodnotu a rozptyl. Střední hodnota obou přírůstků je zřejmě 0. Rozptyl můžeme spočítat

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(W_{t+h}^H - W_t^H) &= \operatorname{var}(W_{t+h}^H) + \operatorname{var}(W_t^H) - 2\operatorname{cov}(W_{t+h}^H, W_t^H) = \\
&= (t+h)^{2H} + t^{2H} - 2\frac{1}{2}[(t+h)^{2H} + t^{2H} - |(t+h) - t|^{2H}] = \\
&= h^{2H} = \operatorname{var}(W_h^H - W_0^H).
\end{aligned}$$

□

4.2 Frakcionální Lévyho proces

Nyní zadefinujeme frakcionální Lévyho proces odvozením od Lévyho procesu. V Lévy-Itōově rozkladu nahradíme Wienerův proces frakcionálním Wienerovým procesem.

Definice 4.2. *Nechť $L = (L_t, t \geq 0)$ je Lévyho proces s rozkladem podle věty 3.13 a $W^H = (W_t^H, t \geq 0)$ je frakcionální Wienerův proces s Hurstovým indexem H a nechť W^H je nezávislý na $L - W$. Potom definujeme* frakcionální Lévyho proces *s Hurstovým indexem H předpisem*

$$L_t^H = \mu t + \sigma^2 W_t^H + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx).$$

Jelikož frakcionální Wienerův proces s Hurstovým indexem $H = 1/2$ je Wienerův proces, frakcionální Lévyho proces se stejným indexem je také Lévyho proces.

Pokud v předchozí definici nahradíme frakcionání Wienerův proces stochastickým integrálem podle věty 4.2, můžeme frakcionální Lévyho proces zkonstruovat pomocí Itōova a Poissonova integrálu.

$$\begin{aligned}
L_t^H = &\mu t + \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - |s|^{H-1/2}] dW_s + \\
&+ \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx).
\end{aligned}$$

Věta 4.4. *Nechť L^H je frakcionální Lévyho proces, potom L^H má modifikaci s càdlàg trajektoriemi.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý a plyne z věty 3.5 a ze spojitosti trajektorií frakcionálního Wienerova procesu. Stačí si uvědomit, že pokud sečteme càdlàg trajektorii a spojitou trajektorii, dostaneme opět càdlàg trajektorii.

□

Věta 4.5. *Frakcionální Lévyho proces má stacionární přírůstky.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, frakcionální Lévyho proces je součtem frakcionálního Wienerova procesu a Lévyho procesu, které mají Stacionární přírůstky. Jedná se o součet nezávislých procesů a rozdělení součtu je dáno jednoznačně.

□

Literatura

[1] Janeček K. *Advanced Topics in Financial Mathematics.* Skripta v elektronické podobě, veřejně nedostupná.

[2] Lachout P. *Teorie pravděpodobnosti.* Druhé vydání. Karolinum, Praha, 2004.

[3] Applebaum D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge University Press, New York, 2004.

[4] Hlubinka D. *Stochastická analýza.* url: goo.gl/Nuu7WY, dostupné: květen 2014.

[5] Štěpán J. *Teorie pravděpodobnosti.* První vydání. Academia, Praha, 1987.

[6] Lachout P. *Diskrétní martingaly.* url: goo.gl/i6Y8cL, dostupné: květen 2014.

[7] Vyoral M. *Frakcionální Brownův pohyb.* Diplomová práce. Praha, 2002.

[8] Mandelbrot B. a Van Ness J. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968.